



Федеральная служба по надзору в сфере образования и  
науки

ФГБНУ «Федеральный институт педагогических  
измерений»

**И.В. Яценко, А.В. Семенов**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ  
для учителей  
по преподаванию учебных предметов  
в образовательных организациях с  
высокой долей обучающихся с рисками  
учебной неуспешности**

**МАТЕМАТИКА**

Москва, 2024

## Введение

Частой причиной учебной неуспешности обучающихся является слабая сформированность метапредметных умений и/или существенные пробелы в базовой предметной подготовке.

Диагностика обучающихся с трудностями в учебной деятельности и позволит выявить причины затруднений, например:

- слабая сформированность читательских навыков и навыков работы с информацией;
- слабая сформированность элементарных математических представлений (чувства числа, пространственных представлений, навыков счета и т.п.);
- слабая сформированность навыков самоорганизации, самокоррекции;
- конкретные проблемы в предметной подготовке (неосвоенные системообразующие элементы содержания, без владения которыми невозможно понимание следующих тем; слабо сформированные предметные умения, навыки и способы деятельности).

По итогам диагностики складывается содержательная картина проблем в обучении каждого класса, которая может быть взята за основу адресной корректировки методики работы учителя и образовательных программ.

В зависимости от распространенности среди учеников класса конкретной проблемы в обучении выбираются индивидуальные или групповые формы организации учебной работы.

В случае выявления проблем с грамотностью чтения и информационной грамотностью целесообразно больше внимания уделять работе с текстом учебника, детальному разбору содержания выдаваемых обучающимся заданий.

Система работы учителя может быть акцентирована на развитие у обучающихся навыков самоорганизации, контроля и коррекции результатов своей деятельности (например, посредством последовательно реализуемой совокупности требований к организации различных видов учебной деятельности, проверке результатов выполнения заданий).

Индивидуальные пробелы в предметной подготовке обучающихся могут быть компенсированы за счет дополнительных занятий во внеурочное время, выдачи обучающимся индивидуальных заданий по повторению конкретного учебного материала к определенному уроку и обращения к ранее изученному в процессе освоения нового материала.

Наличие одинаковых существенных пробелов в предметной подготовке у значительного числа обучающихся класса требует определенной корректировки основной образовательной программы вплоть до формирования образовательной программы компенсирующего уровня.

Методические рекомендации по преподаванию математики в образовательных организациях с высокой долей обучающихся с рисками учебной неуспешности выстроены на основе анализа проблем подготовки участников ЕГЭ, балансирующих на грани преодоления минимального балла. Рекомендации ориентированы на организацию преподавания учебных предметов в 10-11 классах и учитывают специфику учебного предмета. Рекомендации содержат в себе подходы к корректировке образовательных программ и пример программы компенсирующего уровня, а также подходы изменению методики работы учителя-предметника, советы по организации подготовки к ЕГЭ.

## **1. Описание проблем в образовательной подготовке обучающихся, балансирующих на грани преодоления минимального балла, по итогам ЕГЭ по математике базового уровня<sup>1</sup>**

Модель ЕГЭ по математике базового уровня предназначена для государственной итоговой аттестации по программам среднего общего образования обучающихся, не планирующих получения профессии, предъявляющей специальные требования к уровню математической подготовки. Так как в настоящее время существенно возрастает роль общематематической подготовки в повседневной жизни, в массовых профессиях, в модели ЕГЭ по математике базового уровня усилены акценты на выявление способности обучающихся применять полученные знания на практике, развитие логического мышления, умения работать с информацией.

Задания проверяют базовые вычислительные и логические умения и навыки, умение анализировать информацию, представленную на графиках и в таблицах, использовать простейшие вероятностные и статистические модели, ориентироваться в простейших геометрических конструкциях. В работу включены задания базового уровня по всем основным предметным разделам: геометрия (планиметрия и стереометрия), алгебра, начала математического анализа, теория вероятностей и статистика.

Экзаменационная работа состоит из одной части, содержащей 20 заданий с кратким ответом базового уровня сложности. Ответом к каждому из заданий 1–20 является целое число, или конечная десятичная дробь, или последовательность цифр. Задание с кратким ответом считается выполненным, если верный ответ записан в бланке ответов № 1 в той форме, которая предусмотрена инструкцией по выполнению задания.

Успешность выполнения заданий базового уровня сложности (кроме заданий 13, 17, 19, 20) выше 60%. Свыше 80% участников экзамена успешно справились с заданиями 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 18. Основной контингент не решивших эти задания составляют выпускники со слабой образовательной подготовкой по математике.

По итогам экзамена базового уровня наиболее высокие результаты получены при выполнении следующих заданий: практико-ориентированные задания на чтение диаграмм и графиков (задание 11), сопоставление величин (задание 9), бытовые расчеты (задание 6); работа с формулой (задание 4); традиционная тема курса старшей школы на чтение графика функции и производной функции (задание 14). Эти задания успешно выполнили не менее 90% участников экзамена. Этим заданиям нужно уделить первоочередное внимание при подготовке обучающихся со слабой математической подготовкой.

В группу заданий, с которыми участники экзамена справились несколько хуже, но также на достаточно высоком уровне, вошли как задания, тематически относящиеся к курсу математики старшей школы, но базирующиеся на знаниях и умениях, формируемых в курсе алгебры основной школы, так и задания, «перешедшие» из основной школы: нахождение значения числового выражения (задание 1), преобразование степенного выражения (задания 2), решение практической задачи с процентами (задача 3), преобразование иррационального выражения (задания 5), решение квадратного уравнения (задание 7), решение планиметрической задачи на вычисление площади прямоугольника (задание 8), решение вероятностной задачи (задание 10), на работу с информацией, представленной в таблице (задание 12), решение планиметрической задачи на решение прямоугольного треугольника (задание 15), решение стереометрической задачи на объем круглого тела (задача 16), на задание с числовыми неравенствами (задача 17), на задание с числами (задание 19). В списке этих заданий нужно выделить основной набор задач,

---

<sup>1</sup> Приводится анализ результатов базового ЕГЭ 2019 года, поскольку в 2020 году базовый экзамен не проводился.

позволяющий пройти аттестационный рубеж, для подготовки обучающихся со слабой математической подготовкой.

Низкий уровень успешности продемонстрировали участники экзамена при выполнении практико-ориентированного задания по стереометрии на вычисление объема тела (задание 13) и задания на построение простейшей математической модели (задание 20). Эти задания при подготовке обучающихся со слабой математической подготовкой нужно рассматривать в последнюю очередь.

В таблице 1 дано описание четырех групп участников ЕГЭ базового уровня по математике с разными уровнями математической подготовки.

Таблица 1

Описание отдельных групп участников экзамена	Описание уровня подготовки отдельных групп участников экзамена
Группа 1 Тестовый балл – 2 Первичный балл – 0–6	Группа с наиболее низким уровнем подготовки, не обладающая устойчивыми навыками счета и чтения
Группа 2 Тестовый балл – 3 Первичный балл – 7–11	Группа с низким уровнем математической подготовки. Эта группа обучающихся, как правило, выполняет задания, требующие прямого подсчета, но ошибается в задачах на проценты. За задания, требующие знания элементов содержания по программе 10–11 класса, часто не берутся
Группа 3 Тестовый балл – 4 Первичный балл – 12–16	Группа с базовым уровнем математических знаний, необходимых в бытовых расчетах, жизненных ситуациях. Слабое выполнение последних заданий, требующих логических построений, знания функций, изученных в старших классах, компенсируется устойчивыми вычислительными навыками и решением базовых текстовых задач
Группа 4 Тестовый балл – 5 Первичный балл – 17–20	Наиболее подготовленные участники базового экзамена. Часть из них может претендовать на средний или даже высокий балл на профильном экзамене. Их выбор базового экзамена осознанный: они планируют продолжение образования в областях, не связанных с математикой. Профильный ЕГЭ не требуется для поступления на выбранные ими специальности

Обучающиеся, балансирующие на грани преодоления минимального балла, по итогам ЕГЭ по математике базового уровня относятся к первым двум группам.

Группа наименее подготовленных участников экзамена выполняет не более шести заданий (соответствует отметке «2»). Выпускники не обладают математическими умениями на базовом, бытовом и общественно значимом уровне, не владеют устойчивыми умениями счета и чтения.

Группа низкого уровня подготовки. Участники экзамена, относящиеся к этой группе, выполняют от 7 заданий до 11 заданий (соответствует отметке «3»). Как правило, это задания, требующие прямого подсчета. Экзаменуемые с данным уровнем подготовки обычно ошибаются в задачах на проценты, испытывают затруднения при выполнении вычислительных операций.

Для определения образовательной траектории обучающихся необходимо выявить образовательные дефициты в разделах предметного курса.

При обучении и подготовке к экзамену рекомендуется использовать следующую таблицу, включающую все темы и элементы содержания, которые проверяются на ЕГЭ по математике базового уровня, и средние проценты выполнения заданий в 2019 г. (таблица 2).

Таблица 2

Номер задания	Элементы содержания	Средние проценты выполнения, в 2019 г.
	<b>Алгебра</b>	
1	Целые, дробные числа	84
2	Рациональные числа, степень с целым показателем	86
3	Дроби, проценты, рациональные числа	90
4	Работа с формулой: преобразования выражений, включающих арифметические операции, операцию возведения в степень, операцию извлечения корня	91
5	Преобразования выражений, включающих арифметические операции, операцию возведения в степень, операцию извлечения корня, преобразование тригонометрических и логарифмических выражений	73
6	Решение текстовой задачи, сводящееся к преобразованию выражений, включающих арифметические операции	92
12	Текстовая задача, сводящаяся к преобразованию выражений, включающих арифметические операции	89
19	Текстовая задача, сводящаяся к преобразованию выражений, включающих арифметические операции и операцию возведения в степень	55
20	Текстовая задача, сводящаяся к преобразованию выражений, включающих арифметические операции и операцию возведения в степень	30
	<b>Уравнения и неравенства</b>	
7	Квадратные, рациональные, иррациональные, тригонометрические, показательные, логарифмические уравнения	84
9	Практическая задача: применение математических методов для решения содержательных задач из различных областей науки и практики. Интерпретация результата, учет реальных ограничений	93
17	Решение рационального, показательного, логарифмического неравенства. Координатная прямая	58
18	Применение математических методов для решения содержательных задач из различных областей науки и практики. Интерпретация результата, учет реальных ограничений. Верные и неверные утверждения	88
	<b>Функции</b>	
11	График функции. Примеры функциональных зависимостей в реальных процессах и явлениях	95
14	График функции. Примеры функциональных зависимостей в реальных процессах и явлениях. Свойства функции	94
	Начала математического анализа	
14	По графику: геометрический смысл производной, уравнение касательной; применение производной к исследованию функции	94

	<b>Геометрия</b>	
8	Треугольник, параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат, трапеция: длина отрезка, величина угла, площадь фигуры	82
13	Призма, пирамида, многогранники, цилиндр, конус, шар и сфера: длина, величина угла, площадь, объем	48
15	Треугольник, параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат, трапеция: длина отрезка, величина угла, площадь фигуры	65
16	Призма, пирамида, многогранники, цилиндр, конус, шар и сфера: длина, величина угла, площадь, объем	66
	Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей	
10	Вероятность события	78
11	Табличное и графическое представление данных	95

Для обучения школьников со слабой математической подготовкой в первую очередь нужно обратить внимание на задания с результатами выполнения свыше 90%: практико-ориентированные задания на чтение графиков (задание 11), сопоставление величин (задание 9), бытовые расчеты (задание 6); работа с формулой (задание 4); на чтение графика функции и графика производной функции (задание 14). Для обеспечения прохождения аттестационного рубежа нужно обязательно рассматривать задания, выполнение которых находится в диапазоне 80–90%: вычислительные примеры (задания 1, 2); простейшая задача на доли, проценты (задание 3); вычислительная текстовая задача (задание 12); квадратные, рациональные, иррациональные, тригонометрические, показательные, логарифмические уравнения (задание 7); ложные и истинные утверждения (задания 18); простейшая геометрическая задача (задание 8). Обязательно нужно рассматривать простейшие задачи на вычисление вероятности события (задание 10).

### **Описание проблем в образовательной подготовке обучающихся, балансирующих на грани преодоления минимального балла, по итогам ЕГЭ по математике профильного уровня**

Модель ЕГЭ по математике профильного уровня предназначена для государственной итоговой аттестации выпускников, планирующих получение профессии, предъявляющей специальные требования к уровню математической подготовки абитуриентов. В модели ЕГЭ по математике профильного уровня присутствуют задания, контролирующие умение применять полученные знания для решения практических задач и задач из смежных учебных предметов.

Экзаменационная работа по математике профильного уровня состоит из двух частей, которые различаются по содержанию, сложности и количеству заданий:

– часть 1 содержит 8 заданий (задания 1–8) с кратким ответом в виде целого числа или конечной десятичной дроби;

– часть 2 содержит 4 задания (задания 9–12) с кратким ответом в виде целого числа или конечной десятичной дроби и 7 заданий (задания 13–19) с развернутым ответом (полная запись решения с обоснованием выполненных действий).

По уровню сложности задания распределяются следующим образом: задания 1–8 имеют базовый уровень; задания 9–17 – повышенный уровень; задания 18 и 19 относятся к высокому уровню сложности.

Задания части 1 направлены на проверку освоения базовых умений и практических навыков применения математических знаний в повседневных ситуациях. Задания этой

части проверяют базовые вычислительные и логические умения и навыки, умение анализировать информацию, представленную на графиках и в таблицах, использовать простейшие вероятностные и статистические модели, ориентироваться в простейших геометрических конструкциях. В часть 1 работы включены задания по всем основным разделам курса математики: геометрия (планиметрия и стереометрия), алгебра, начала математического анализа, теория вероятностей и статистика. На решение заданий этой части и должны быть направлены все усилия при подготовке обучающихся, балансирующих на грани преодоления минимального балла.

В целях эффективного отбора абитуриентов для продолжения образования в высших учебных заведениях с различными требованиями к уровню математической подготовки задания части 2 экзаменационной работы соответствуют традиционному уровню требований вузов со вступительным экзаменом по математике. Последние три задания части 2 предназначены для конкурсного отбора в вузы с повышенными требованиями к математической подготовке абитуриентов.

Посредством заданий части 2 осуществляется проверка освоения математики на профильном уровне, необходимом для применения математики в профессиональной деятельности и на творческом уровне. При подготовке обучающихся со слабой математической подготовкой нужно уделить внимание и решению заданий 9–12.

Участники профильного экзамена демонстрируют высокую степень овладения базовыми умениями: проценты и доли, округление с избытком и недостатком, чтение графиков и диаграмм реальных зависимостей, простейшие геометрические умения, решение уравнений различных типов. Первые пять заданий практически по всем вариантам выполнены на уровне 92–100%. Этим заданиям нужно уделить первоочередное внимание при обучении и/или подготовке к экзамену обучающихся со слабой математической подготовкой. Из заданий с кратким ответом повышенного уровня сложности традиционно самым хорошо решаемым является задание 9 (на действия со степенями). Намного лучше участники экзамена стали решать задачу 12 (по математическому анализу, на исследование функции с помощью производной). Эти задания можно добавить в основной набор задач, позволяющий пройти аттестационный рубеж, для обучения и/или подготовки к экзамену обучающихся со слабой математической подготовкой. Среди заданий с развернутым ответом наибольшая успешность выполнения у заданий 13 и 15. Эти задания также можно включать в список задач для обучающихся со слабой математической подготовкой.

В таблице 3 дано описание пяти групп участников ЕГЭ профильного уровня по математике с разными уровнями математической подготовки.

Таблица 3

Описание отдельных групп участников экзамена	Описание уровня подготовки отдельных групп участников экзамена
Группа 1 (минимальный) Тестовый балл: 0 – 23 Первичный балл: 0 – 6	Обучающиеся, не обладающие математическими умениями на базовом, бытовом и общественно значимом уровне
Группа 2 (базовый 1) Тестовый балл: 27 – 50 Первичный балл: 7 – 10	Обучающиеся, освоившие курс математики на базовом уровне, но не имеющие достаточной подготовки для продолжения образования по техническим специальностям
Группа 3 (базовый 2) Тестовый балл: 56 – 68 Первичный балл: 11 – 13	Обучающиеся, успешно освоившие базовый курс, фактически близкие к следующему уровню подготовки. Это участники экзамена, имеющие шансы на переход в следующую группу по уровню подготовки. Фактически могут обучаться по техническим специальностям большинства вузов

Группа 4 (повышенный) Тестовый балл: 70 – 86 Первичный балл: 14 – 22	Обучающиеся, освоившие курс математики и имеющие достаточный уровень математической подготовки для продолжения образования по большинству специальностей, требующих повышенной и высокой математической компетентности
Группа 5 (высокий) Тестовый балл: 88 – 100 Первичный балл: 23 – 32	Обучающиеся, освоившие курс математики и имеющие достаточный уровень математической подготовки для продолжения обучения с самыми высокими требованиями к математической компетентности

Обучающиеся, балансирующие на грани преодоления минимального балла, по итогам ЕГЭ по математике профильного уровня относятся к первым двум группам.

Группа минимального уровня подготовки. Участники экзамена, относящиеся к этой группе, выполняют не более пяти заданий. Эти обучающиеся не обладают математическими умениями на базовом, бытовом и общественно значимом уровне.

Группа первого базового уровня подготовки. Участники экзамена, относящиеся к этой группе, выполняют, как правило, не более 10 заданий. Эти обучающиеся освоили курс математики на базовом уровне, но не имеют достаточной подготовки для продолжения образования по техническим специальностям.

Для определения индивидуальной образовательной траектории обучающихся необходимо выявить образовательные дефициты в освоении ключевых разделов предметного курса.

При обучении и/или подготовке к экзамену рекомендуется использовать следующую таблицу, включающую все темы и элементы содержания, которые проверяются на ЕГЭ по математике профильного уровня, и средние проценты выполнения заданий с кратким ответом в 2020 г. (таблица 4).

Таблица 4

Номер задания	Элементы содержания	Средние проценты выполнения, в 2020 году
	<b>Алгебра</b>	
1	Целые, дробные числа, действия с рациональными числами, проценты	89
9	Значение выражения: рационального, иррационального, тригонометрического, показательного, логарифмического	65
	<b>Уравнения и неравенства</b>	
5	Квадратные, рациональные, иррациональные, показательные, логарифмические уравнения	96
10	Работа с формулой – применение математических методов для решения содержательных задач из различных областей науки	76
11	Решение текстовой задачи	57

	<b>Функции</b>	
2	Табличное и графическое представление данных. График функции. Примеры функциональных зависимостей в реальных процессах и явлениях	98
	<b>Начала математического анализа</b>	
7	По графику: геометрический смысл производной, уравнение касательной; применение производной к исследованию функции	63
12	Применение производной к исследованию функции	48
	<b>Геометрия</b>	
3	Геометрия на «клетках»: длина отрезка, величина угла, площадь фигуры	90
6	Треугольник, параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат, трапеция, окружность и круг: длина отрезка, величина угла, площадь фигуры	77
8	Призма, пирамида, многогранники, цилиндр, конус, шар и сфера: длина, величина угла, площадь, объем	64
	<b>Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей</b>	
4	Вероятность события	90

Для подготовки обучающихся со слабой математической подготовкой в первую очередь следует обратить внимание на задания с результатами выполнения свыше 80%: вычислительная текстовая задача (задание 1); на чтение графиков и диаграмм (задание 2); наглядная геометрия (задание 3); на вычисление вероятности события (задание 4); на решение квадратного, рационального, иррационального, показательного, логарифмического уравнений (задание 5). Для обеспечения прохождения аттестационного рубежа нужно обязательно рассматривать задания, выполнение которых находится в диапазоне 50–80%: геометрическая задача (задание 6), чтение графика функции и графика производной функции, исследование функции с помощью производной (задание 7), стереометрическая задача (задание 8), применение математических методов для решения содержательных задач из различных областей науки (задание 10).

Следует отметить, что результаты группы 1 (с минимальной подготовкой) экзамена профильного уровня мало отличаются от результатов малоподготовленных групп участников ЕГЭ по математике базового уровня. Эти участники едва ли могут рассчитывать на преодоление минимального балла экзамена профильного уровня. Скорее всего, большинство из тех, кто не сумел сдать экзамен профильного уровня, справились бы с базовым экзаменом хотя бы на минимальном уровне. Поэтому при выборе уровня экзамена по математике обучающимися со слабой математической подготовкой важно помочь им реалистично оценить свои возможности и выбрать посильный уровень экзамена.

## 2. Основные направления работы со слабоуспевающими обучающимися

Для формирования индивидуальной образовательной траектории десятиклассников необходимо выявить образовательные дефициты по итогам сдачи основного государственного экзамена или для одиннадцатиклассников – итоговой контрольной работы. Пример такого анализа выполнения заданий части 1 дан в таблице 5.

Таблица 5

Задание (в КИМ ЕГЭ базового уровня)	Элементы содержания	Баллы	Необходимо изучить/ повторить
	<b>Практико-ориентированные</b>		
1–5	Задача на понимание текста, вычисления, применение формул		
	<b>Числа и вычисления</b>		
6	Действия с обыкновенными и десятичными дробями		
8	Действия с корнями		
	Алгебраические выражения		
13	Значение алгебраического выражения		
14	Формула		
	<b>Уравнения и неравенства</b>		
9	Линейное и квадратное уравнения		
15	Система линейных неравенств		
	Числовые последовательности		
12	Последовательности, арифметическая и геометрическая последовательности		
	<b>Функции и графики</b>		
11	Формулы и графики линейных, дробно-рациональных, квадратичных функций		
	<b>Координаты на прямой и плоскости</b>		
7	Координатная прямая		
	<b>Геометрия</b>		
16	Длина отрезка, величина угла		
17	Длина отрезка, величина угла		
18	Площадь фигур		
19	Геометрия на «клетках»: длины, углы, площади		
20	Теоретические вопросы		
	<b>Статистика и теория вероятностей</b>		
10	Задача на вычисление вероятности		

По результатам анализа потребуется корректировка рабочей программы по математике (алгебра и начала анализа, геометрия). Примеры рабочих программ даны ниже. С учетом того, что существенный вклад в низкие образовательные результаты обучающихся средней школы по математике вносят пробелы в освоении курса математики 5–9 классов, в программу следует включить повторное прохождение ключевых разделов курса математики основной школы. Ниже приведены примеры рабочих программ компенсирующего базового и основного базового уровней.

**Компенсирующая базовая программа** содержит расширенный блок повторения и предназначена для обучающихся, которые по различным причинам после окончания основной школы не имеют достаточной подготовки для успешного освоения разделов алгебры и начал математического анализа, геометрии, статистики и теории вероятностей по программе средней школы. Реализация компенсирующей базовой программы может быть частью мер, принимаемых для повышения уровня образования в образовательных организациях, в которых велика доля обучающихся с рисками учебной неуспешности, наряду с постоянным мониторингом уровня математической подготовки обучающихся всех классов, повышением квалификации учителей, использованием адаптированных учебных пособий, использованием технологий дистанционного обучения и т.д.

**Основная базовая программа** по математике предназначена для обучающихся средней школы, не испытывавших серьезных затруднений на предыдущем уровне обучения.

## **РАБОЧАЯ ПРОГРАММА** **среднего общего образования по учебному предмету «математика»** **(алгебра и начала математического анализа, геометрия). 10–11 классы**

### **Пояснительная записка**

Рабочая программа по математике для уровня среднего общего образования составлена на основе требований к предметным результатам освоения основной образовательной программы, представленных в Федеральном государственном образовательном стандарте среднего общего образования. Рабочая программа отражает обязательную часть содержания учебного предмета «математика» на уровне среднего общего образования. В ней учитываются возможности предмета в реализации требований к личностным и метапредметным результатам обучения, а также преемственность с программами по предмету «математика» для уровня основного общего образования, по предметам «информатика», «история», «география», «физика» и «биология» для среднего общего образования.

### **Цели изучения предмета «математика»**

В соответствии с Указом Президента Российской Федерации от 7 мая 2012 г. «О мерах по реализации государственной политики в области образования и науки» распоряжением Правительства Российской Федерации от 24 декабря 2013 г. № 2506-р утверждена «Концепция развития математического образования в Российской Федерации», в которой определены базовые принципы, цели, задачи и основные направления развития математического образования в Российской Федерации.

Согласно Концепции математическое образование должно, с одной стороны, «предоставлять каждому обучающемуся возможность достижения уровня математических знаний, необходимого для дальнейшей успешной жизни в обществе», с другой – «обеспечивать необходимое стране число выпускников, математическая подготовка которых достаточна для продолжения образования в различных направлениях и для практической деятельности, включая преподавание математики, математические исследования, работу в сфере информационных технологий и др.». Помимо этого, «в основном общем и среднем общем образовании необходимо предусмотреть подготовку обучающихся в соответствии с их запросами к уровню подготовки в сфере математического образования».

Цель освоения программы средней школы на базовом уровне – обеспечение обучающимся возможности использования математических знаний и умений в повседневной жизни и успешного продолжения образования по специальностям, не

связанным с прикладным использованием математики. Внутри этого уровня выделяются две различные программы: *компенсирующая базовая* и *основная базовая*.

Обучающиеся, осуществляющие обучение по обеим программам базового уровня, должны освоить общие математические умения, необходимые для жизни в современном обществе; вместе с тем они получают возможность изучить предмет глубже, с тем чтобы в дальнейшем изучать математику для профессионального применения.

Программы содержат раздел «Статистика и теория вероятностей», впервые введенный в программы по математике в 2004 г. К этому разделу относятся также сведения из логики, комбинаторики и теории графов, значительно варьирующиеся в зависимости от программы.

В обеих программах большое внимание уделяется практико-ориентированным задачам.

Важными акцентами программ являются: развитие таких коммуникативных умений, как формулировать, аргументировать и критически оценивать полученную информацию; формирование основ логического мышления в части проверки истинности и ложности утверждений, построения примеров и контрпримеров, цепочек утверждений, формулирования отрицаний, а также необходимых и достаточных условий в математических утверждениях.

Требования, сформулированные в разделе программы «Геометрия», относятся к развитию пространственных представлений и использованию графических методов в большей степени, чем к формальному описанию стереометрических фактов.

Таким образом, использование настоящих программ дает возможность решения следующих актуальных задач.

1. Обеспечение каждому обучающемуся возможности получения математического образования в соответствии с его целями и потребностями в образовании, что достигается на основе прозрачного перечня планируемых результатов обучения, имеющего четко выраженные приоритеты для различных целевых групп обучающихся.

2. Обеспечение каждому обучающемуся возможности получения качественного математического образования, в том числе для продолжения образования в областях, связанных с математикой.

3. Обеспечение достижимости положительных результатов государственной итоговой аттестации на базовом уровне за счет выделения ключевых требований, делающих возможной и реалистичной подготовку обучающегося, даже при отсутствии у него интереса и склонности к математике. Программа позволяет организовать обучение, в том числе по индивидуальным образовательным траекториям, делая обучение психологически комфортным и эффективным.

Программа составлена с учетом системообразующей роли математики как основы фундаментального образования, позволяющей успешно осваивать смежные учебные предметы, в том числе информатику.

### **Место учебного предмета «математика» в учебном плане**

Математика занимает особое место в науке, культуре и общественной жизни, являясь одной из важнейших составляющих мирового научно-технического прогресса. Изучение математики играет системообразующую роль в образовании, развивая познавательные способности человека, в том числе к логическому мышлению, влияя на преподавание других дисциплин. Таким образом, к главным качествам математики, определяющим ее место в учебном плане, относятся ее фундаментальность как научной дисциплины и универсальность с точки зрения использования математических идей, методов, алгоритмов и т.п. в других учебных предметах.

Базовый курс по предмету «математика» (алгебра и начала математического анализа, геометрия) (10–11 классы) представлен следующими видами программ:

- базовая программа;
- компенсирующая базовая программа.

Базовая программа на уровне среднего общего образования составлена из расчета общей учебной нагрузки 280 часов за два года обучения: 4 часа в неделю в 10 классе, 4 часа в неделю в 11 классе. В программе учтено 10% времени, отводимого на вариативную часть программы, содержание которой формируется участниками образовательного процесса.

Базовая компенсирующая программа на уровне среднего общего образования составлена из расчета общей учебной нагрузки 315 часов за два года обучения: 5 часов в неделю в 10 классе (из них 1 час – из части, формируемой участниками образовательных отношений), 4 часа в неделю в 11 классе. В программе учтено 10% времени, отводимого на вариативную часть программы, содержание которой формируется участниками образовательного процесса.

Любая рабочая программа должна полностью включать в себя содержание одной из данных программ.

### **Общая характеристика учебного предмета «математика»**

Программа по учебному предмету «математика» строится на основе системно-деятельностного, метапредметного, личностно-ориентированного, культурологического подходов, а также на основе принципов диалогизации, вариативности, доступности, преемственности и непрерывности обучения с учетом специфики поликультурного общества и полиэтнического состава обучающихся.

Для всей программы в целом основным является системно-деятельностный подход, согласно которому обучение математике организуется как учебная деятельность школьников на математическом содержании. Системно-деятельностный подход к обучению математике проявляется в том, что:

- учебные задания ориентированы на развитие мотивации, без которой невозможно включить школьников в деятельность;
- школьный математический язык рассматривается как система;
- ученик овладевает предметными и метапредметными знаниями и умениями, а также межпредметными понятиями, связанными с математикой, в процессе собственной деятельности;
- в процессе обучения различным разделам курса математики создаются условия для овладения многими универсальными учебными действиями (УУД);
- выделение учебных математических задач и обеспечение их решения;
- учитываются индивидуальные и возрастные особенности обучающихся при организации их деятельности, что помогает выстраиванию индивидуальной траектории развития ученика в зависимости от различных факторов.

Следование метапредметному подходу выражается в построении программы на основе единства целей, элементов содержания образования и методов обучения. В программе находят отражение связи с другими курсами средней школы за счет рассмотрения межпредметных понятий, понятий из других учебных предметов, соподчиненных с математическими понятиями, использования знаний, приобретенных при изучении других учебных предметов, выполнения метапредметных заданий, а также при реализации межпредметных проектов.

Личностно-ориентированный подход предполагает учет особенностей ученика, его субъектного опыта, их выявление, направленность обучения на формирование определенных качеств личности (учет особенностей ученика подробнее раскрыт в принципе вариативности). Качества личности формируются при выполнении заданий, требующих проявления активности, избирательности, ответственности, а также за счет исторического материала, способствующего формированию гордости за своих

соотечественников, внесших значимый вклад в развитие математики, использования межпредметных связей и связей с окружающим миром, активизирующих познавательную деятельность.

При обучении математике необходимо учитывать специфические черты науки математики: оперирование абстракциями высокого уровня и наличие собственного языка, отличного от естественного. Поэтому реализация перечисленных выше принципов обучения будет иметь свои особенности.

Принцип диалогизации при обучении математике реализуется с двух позиций: а) становление и развитие математической речи, на базе которой возможна равноправность участников диалога в поиске решения, стремление к взаимопониманию, порождению смысла; б) развитие коммуникативных умений.

В средней школе ученики продолжают изучение основных элементов школьной математики, включающих различные формы представления информации (знаковые системы): словесную (слова естественного языка, научные термины), образно-графическую (схемы, чертежи, графики, рисунки), знаково-символическую (логико-математические знаки). Усвоение каждой из форм и умение переводить текст из одной в другую способствуют пониманию математики.

Для развития коммуникативных умений важно использование различных форм организации учебного процесса: дискуссии, работа в паре постоянного состава и сменного состава, работа над проектом, проведение мини-исследования и др.

В процесс обучения математике принцип вариативности реализуется через включение в содержание задач, имеющих несколько способов решения, неоднозначный ответ, и задач с данными, которые задают несуществующий объект (но этот вывод требует анализа задачной ситуации). С позиций учебной дифференциации вариативность относится к содержанию заданий (задания различаются по степени сложности, самостоятельности выполнения или объему), методам и средствам обучения. Учитель в зависимости от уровня готовности класса, интересов и запросов учеников, имеет возможность дозировать учебную работу. В программе по математике каждая тема рассматривается и с логической, и с образной точек зрения.

Осуществляется учет всех составляющих субъектного опыта ученика: как ценности и базовой ступени присвоения общественно-исторического опыта в области математики на всех этапах обучения, как условия понимания себя и других, выявление и осмысление субъектного опыта ученика.

Учет математического опыта, приобретенного учеником в основной школе, реализуется в принципе преемственности и перспективности обучения. Данный принцип реализуется в содержательном и развивающем аспектах. Содержательный аспект направлен на расширение и углубление знаний и умений, их поступательное развертывание. Содержание учебного материала представляет собой не набор отдельных сведений из разных областей математики, а взаимосвязанную последовательность тем.

Развивающий аспект рассматриваемого принципа включает в себя создание условий для установления самим учеником взаимосвязи между старым и новым опытом, что способствует преобразованию отдельных умений ученика в новое интегративное умение. К таким условиям относятся: выполнение заданий рефлексивного характера, обеспечивающих осознание учениками причин возникающих трудностей, заданий не только из зоны ближайшего, но перспективного развития («будущая задача»); поиск и обсуждение ошибок; поиск условий применимости правила и др. Учет субъектного опыта, способа восприятия мира, использование разных каналов получения информации при выполнении одних и тех же заданий в процессе обучения математике способствуют преобразованию неформальных представлений реальной жизни в теоретическое знание.

В связи с высоким уровнем абстракции математического знания специфическим для обучения математики является принцип приоритета понимания над запоминанием, который тесно связан с принципами преемственности и перспективности.

Поскольку математический язык и математические тексты имеют формализованный характер, необходима специальная работа по обеспечению понимания школьниками изучаемого материала. Важную роль в этом играет выявление субъектного опыта учеников, его учет в содержании, в форме предъявления учебного материала, в организации его усвоения и контроле. Введение нового математического объекта предполагает рассмотрение реальных ситуаций, его адаптированную научную трактовку, рассмотрение близких обучающемуся примеров и применение приобретенных знаний в реальной жизни. Это является необходимым условием понимания учебного материала. Благодаря конкретным примерам обучающийся связывает новое математическое знание с некоторыми фактами, уже имеющимися в его опыте, т.е. переводит научное понятие на собственный язык (вводит в свой субъектный опыт).

Реализация перечисленных подходов и принципов возможна на основе:

- проектирования процесса обучения математике в средней школе как одной из ступеней непрерывного математического образования;
- восприятия ученика с его типологическими и индивидуальными особенностями, мотивами и целями учебной деятельности как полноправного участника образовательного процесса;
- выделение в качестве самостоятельной линии методологических знаний (знаний о структуре и типологии определений математических понятий и утверждений, знаний о методах решения задач и основных стратегиях поиска их решения, типологии математических задач, знаний и построении математики как научной системы и т.п.), что послужит базой для обучения школьника самостоятельной познавательной деятельности в предмете, организации учебно-исследовательской работы и эффективного формирования соответствующих универсальных учебных действий;
- использования развивающих возможностей математики для обеспечения мотивации изучения предмета;
- привлечения содержания других учебных предметов, культурологической информации и опыта обучающегося, связанного с познанием окружающего мира;
- построения процесса обучения математике на основе реализации триады: жизненный математический опыт обучающихся – математический опыт, приобретаемый в процессе обучения, – обогащенный математический опыт обучающихся, приобретенный в процессе изучения математики; это обеспечивается выделенными выше системно-деятельностным подходом к обучению математике, принципами личностно ориентированного обучения и связями с другими учебными предметами;
- широкого использования информационно-коммуникационных технологий обучения, электронных образовательных ресурсов, современного технического оснащения процесса обучения математике.

#### **Подходы к отбору содержания учебного предмета «математика»**

При формировании содержания программы по математике 10–11 классов необходимо учитывать, что склонности и жизненные планы обучающегося к этому моменту определяются в достаточной мере для того, чтобы выбрать соответствующее направление изучения математики. Поэтому на данном этапе должны решаться задачи успешного завершения изучения предмета в рамках среднего образования в соответствии с выбранными целями его изучения.

Обязательная часть ООП по математике в 10–11 классах на базовом уровне должна обеспечивать:

- закрепление и развитие знаний и навыков, полученных в основной школе;
- развитие умения применять полученные знания и навыки в практических ситуациях;

- формирование элементарных представлений о производной функции и ее применении для изучения и описания свойств функций;
- формирование элементарных представлений о свойствах пространственных геометрических фигур.

Кроме описанных выше подходов, к распределению содержания курса математики по классам программой предусматривается включение в обязательную часть ООП во всех классах отдельных блоков, предполагающих выполнение практических заданий и направленных на развитие умений применять полученные знания на практике, в том числе заданий на использование свойств физических (биологических, химических) процессов, заданий на развитие финансовой грамотности, заданий, связанных с наблюдениями и измерениями в реальных процессах и явлениях окружающего мира, и т.п.

### **Основные содержательные линии**

В курсе математики 10–11 классов представлены следующие содержательные линии:

- алгебра и начала математического анализа
  - Числа и выражения
  - Уравнения и неравенства
  - Функции
  - Начала математического анализа
  - Статистика и теория вероятностей
  - Элементы теории множеств и математической логики
- геометрия
  - Геометрические фигуры
  - Отношения
  - Измерения и вычисления
  - Геометрические построения
  - Векторы и координаты в пространстве

### **Содержание базового курса Математика (Алгебра и начала математического анализа, Геометрия), 10–11 классы**

#### **10 класс. Алгебра и начала математического анализа.**

##### **Компенсирующая базовая программа. 105 часов.**

#### **Числа и выражения. 46 часов.**

Числовые и буквенные выражения.

Натуральные числа, запись, разрядные слагаемые, арифметические действия. Числа и десятичная система счисления. Натуральные числа, делимость, признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 9, 10. Разложение числа на множители. Остатки. Решение арифметических задач практического содержания.

Целые числа. Модуль числа и его свойства.

Части и доли. Дроби и действия с дробями. Округление, приближение. Решение практических задач на прикидку и оценку.

Проценты. Решение задач практического содержания на части и проценты. Степень с натуральным и целым показателем. Свойства степеней. Стандартный вид числа.

Алгебраические выражения. Значение алгебраического выражения.

Квадратный корень. Изображение числа на числовой прямой. Приближенное значение иррациональных чисел.

*Понятие степени с действительным показателем.*

Логарифм числа, основные свойства логарифма. Десятичный логарифм.

Градусная мера угла. Тригонометрическая окружность. Определение синуса, косинуса, тангенса произвольного угла. Основное тригонометрическое тождество. Значения тригонометрических функций для углов  $0^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$ .

### **Уравнения и неравенства. 20 часов.**

Уравнения с одной переменной.

*Понятие многочлена. Разложение многочлена на множители.* Уравнение, корень уравнения. Линейные, квадратные уравнения и системы линейных уравнений.

Решение простейших задач на движение, совместную работу, проценты.

Решение простейших тригонометрических уравнений с помощью тригонометрической окружности.

Простейшие показательные уравнения.

Простейшие логарифмические уравнения.

Простейшие иррациональные уравнения.

Неравенства.

Числовые неравенства и их свойства. Линейные неравенства с одной переменной и их системы. Числовые промежутки. Объединение и пересечение промежутков.

### **Функции. 15 часов.**

Функции и их графики. Графики реальных зависимостей.

Зависимость величин, функция, аргумент и значение, основные свойства функций. График функции. Область определения и множество значений функции. Линейная функция. Ее график. Угловой коэффициент прямой.

*Квадратичная функция. График и свойства квадратичной функции. График функции  $y = \sqrt{x}$ . График функции  $y = \frac{k}{x}$ .*

Нули функции, промежутки знакопостоянства, монотонность (возрастание или убывание) на числовом промежутке. Наибольшее и наименьшее значения функции. Периодические функции и наименьший период. *Графики тригонометрических функций  $y = \cos x$ ,  $y = \sin x$ ,  $y = \operatorname{tg} x$ .*

### **Статистика и теория вероятностей. 13 часов.**

Логика.

Верные и неверные утверждения. Следствие. *Контрпример.* Решение задач практического содержания, связанных с логикой.

Представление данных.

Таблицы. Столбчатые и круговые диаграммы. Решение задач практического содержания, связанных с анализом реальных данных, представленных в табличной форме, на выбор оптимального варианта.

Статистические характеристики набора данных.

Числовые наборы. Среднее арифметическое, медиана, наибольшее и наименьшее значения. *Примеры изменчивых величин.*

Комбинаторика. *Множество.* Перебор вариантов.

Частота и вероятность события. Случайный выбор. Вычисление вероятностей событий в опытах с равновероятными элементарными событиями.

### **Резерв. 11 часов.**

## 10 класс. Алгебра и начала математического анализа.

Базовая программа. 70 часов.

### Числа и выражения. 26 часов.

Решение задач с использованием свойств чисел и систем счисления, делимости, долей и частей, процентов, модулей чисел. Решение задач с использованием свойств степеней и корней, многочленов, преобразований многочленов и дробно-рациональных выражений.

Степень с действительным показателем, свойства степени.

Тригонометрическая окружность, *радианная мера угла*. Синус, косинус, тангенс, *котангенс* произвольного угла. Основное тригонометрическое тождество и следствия из него. Значения тригонометрических функций для углов  $0^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$

$(0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$  рад). *Формулы сложения тригонометрических функций, формулы приведения, формулы двойного аргумента.*

Аркосинус, арксинус, арктангенс числа. *Арккотангенс числа.*

Логарифм числа, свойства логарифма. Десятичный логарифм. Число  $e$ . *Натуральный логарифм*. Преобразование логарифмических выражений.

### Уравнения и неравенства. 17 часов.

Уравнения с одной переменной.

Решение задач на движение и совместную работу с помощью линейных и квадратных уравнений и их систем.

Простейшие тригонометрические уравнения. Решение тригонометрических уравнений.

Простейшие показательные уравнения.

Логарифмические уравнения.

Иррациональные уравнения.

*Решение уравнений, содержащих переменную под знаком модуля.*

*Системы показательных, логарифмических и иррациональных уравнений.*

*Уравнения, системы уравнений с параметром.*

### Функции. 18 часов.

Функции и их графики. Графики реальных зависимостей.

Решение задач с использованием числовых функций и их графиков. Использование свойств и графиков линейных и квадратичных функций, обратной пропорциональности и функции  $y = \sqrt{x}$ . Графическое решение уравнений и неравенств.

Нули функции, промежутки знакопостоянства, монотонность. Наибольшее и наименьшее значения функции. Периодические функции. Четность и нечетность функций. *Сложные функции.*

Тригонометрические функции  $y = \cos x$ ,  $y = \sin x$ ,  $y = \operatorname{tg} x$ . *Функция*  $y = \operatorname{ctg} x$ . Свойства и графики тригонометрических функций.

Показательная функция и ее график. Логарифмическая функция и ее график. Понятие степенной функции и ее график.

### Резерв. 9 часов.

## 10 класс. Геометрия.

### Компенсирующая базовая программа. 70 часов.

#### Геометрические фигуры. 33 часа.

Фигуры на плоскости и в пространстве. Треугольники. Виды треугольников: остроугольные, тупоугольные, прямоугольные. Катет против угла в  $30^\circ$ . Внешний угол треугольника. Биссектриса, медиана и высота треугольника. Равнобедренный треугольник, равносторонний треугольник. Свойства равнобедренного треугольника.

Четырехугольники: параллелограмм, ромб, прямоугольник, квадрат, трапеция и их свойства. Средняя линия треугольника и трапеции. *Выпуклые и невыпуклые фигуры.* Правильный многоугольник. Диагонали многоугольника.

Углы на плоскости и в пространстве. Вертикальные и смежные углы.

Формулы площади прямоугольника, треугольника, ромба, трапеции.

Окружность и круг. Радиус и диаметр.

Куб.

Тетраэдр, правильный тетраэдр.

Правильная пирамида и призма. Прямоугольный параллелепипед. Прямая призма.

Симметрии в кубе, параллелепипеде, *призме и пирамиде.*

#### Отношения. 20 часов.

Равенство фигур. Равенство треугольников. Подобные треугольники в простейших случаях.

Параллельность прямых и плоскостей.

Перпендикулярность прямых и плоскостей.

#### Измерения и вычисления. 10 часов.

Длина и площадь. Периметры и площади фигур. Периметр многоугольника.

Решение задач на клетчатой бумаге.

Соотношения между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике.

Тригонометрические функции углов в прямоугольном треугольнике. Теорема Пифагора. Применение теорем синусов и косинусов.

Сумма внутренних углов треугольника и четырехугольника.

Соотношения в квадрате и равностороннем треугольнике.

Длина окружности и площадь круга. Число  $\pi$ . Вписанный угол, в частности угол, опирающийся на диаметр. Касательная к окружности и ее свойство.

#### Резерв. 7 часов.

## 10 класс. Геометрия.

### Базовая программа. 70 часов.

#### Геометрические фигуры. 25 часов.

Повторение. Решение задач с применением свойств фигур на плоскости.

Наглядная стереометрия. Точка, прямая и плоскость в пространстве, аксиомы стереометрии и следствия из них.

Углы в пространстве.

Многогранники.

Параллелепипед. Свойства прямоугольного параллелепипеда.

Призма и пирамида. Правильная пирамида и правильная призма. Прямая пирамида.

Элементы призмы и пирамиды.

Симметрии в кубе, параллелепипеде, *призме и пирамиде.*

### **Отношения. 20 часов.**

Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве. Параллельность прямых и плоскостей в пространстве. Перпендикулярность прямых и плоскостей. Проекция фигуры на плоскость. Признаки перпендикулярности прямых и плоскостей в пространстве. Теорема о трех перпендикулярах.

*Движения в пространстве: параллельный перенос, центральная симметрия, симметрия относительно плоскости, поворот. Свойства движений. Применение движений при решении задач.*

### **Измерения и вычисления. 10 часов.**

Повторение. Задачи на доказательство и построение контрпримеров. Использование в задачах простейших логических правил. Решение задач с использованием теорем о треугольниках, соотношений в прямоугольных треугольниках, фактов, связанных с четырехугольниками. Решение задач с использованием фактов, связанных с окружностями. Решение задач на измерения на плоскости, вычисление длин и площадей. *Решение задач с помощью векторов и координат.*

Расстояния между фигурами в пространстве.

Теорема Пифагора в пространстве.

Площадь поверхности правильной пирамиды и прямой призмы.

### **Геометрические построения. 8 часов.**

Фигуры и их изображения (куб, пирамида, призма). *Основные понятия стереометрии и их свойства.* Сечения куба и тетраэдра.

Изображение простейших пространственных фигур на плоскости.

### **Резерв. 7 часов.**

## **11 класс. Алгебра и начала математического анализа**

### **Компенсирующая базовая программа. 105 часов.**

### **Уравнения и неравенства. 22 часа.**

Неравенства с одной переменной.

Простейшие показательные неравенства.

Простейшие логарифмические неравенства.

### **Функции. 30 часов.**

Функции и их графики.

Показательная функция и ее график.

Логарифмическая функция и ее график.

Понятие степенной функции и ее график.

### **Начала математического анализа. 32 часа.**

Касательная к графику функции. Понятие производной функции в точке как тангенс угла наклона касательной. Геометрический смысл и физический смысл производной. *Производные многочленов.*

Точки экстремума (максимума и минимума). *Исследование элементарных функций на точки экстремума с помощью производной. Наглядная интерпретация.*

Понятие первообразной функции. Физический смысл первообразной. Понятие об интеграле как площади под графиком функции.

### **Статистика и теория вероятностей. 10 часов.**

*Независимые события. Формула сложения вероятностей.*

*Примеры случайных величин. Равномерное распределение. Примеры нормального распределения в природе. Понятие о законе больших чисел.*

**Резерв. 11 часов.**

**11 класс. Алгебра и начала математического анализа**

**Базовая программа. 105 часов.**

**Уравнения и неравенства. 22 часа.**

*Неравенства с одной переменной.*

*Простейшие показательные неравенства.*

*Логарифмические неравенства.*

*Метод интервалов для решения неравенств.*

*Решение простейших тригонометрических неравенств.*

*Решение неравенств, содержащих переменную под знаком модуля.*

*Системы показательных, логарифмических неравенств.*

**Функции. 23 часа.**

*Взаимно обратные функции. Графики взаимно обратных функций.*

*Обратные тригонометрические функции, их свойства и графики.*

*Логарифмическая функция и ее свойства и график.*

*Степенная функция и ее свойства и график.*

*Преобразования графиков функций: сдвиг вдоль координатных осей, растяжение и сжатие, отражение относительно координатных осей. Графические методы решения уравнений и неравенств.*

**Начала математического анализа. 32 часа.**

*Производная функции в точке. Касательная к графику функции. Геометрический смысл и физический смысл производной. Производные элементарных функций. Правила дифференцирования.*

*Вторая производная, ее геометрический смысл и физический смысл.*

*Понятие о непрерывных функциях. Точки экстремума (максимума и минимума). Исследование элементарных функций на точки экстремума, наибольшее и наименьшее значения с помощью производной. Построение графиков функций с помощью производных. Применение производной при решении задач.*

*Первообразная. Первообразные элементарных функций. Площадь криволинейной трапеции. Формула Ньютона–Лейбница. Определенный интеграл. Вычисление площадей плоских фигур и объемов тел вращения с помощью интеграла.*

**Статистика и теория вероятностей. 17 часов.**

*Решение задач на табличное и графическое представление данных. Решение задач практического содержания, связанных с анализом реальных данных, представленных в табличной форме, на выбор оптимального варианта. Использование свойств и характеристик числовых наборов: средних, наибольшего и наименьшего значений, размаха, дисперсии. Решение задач на определение частоты и вероятности событий. Вычисление вероятностей в опытах с равновероятными элементарными исходами. Решение задач с применением комбинаторики. Решение задач на вычисление вероятностей независимых событий, применение формулы сложения вероятностей. Решение задач с применением диаграмм Эйлера, дерева вероятностей, формулы Бернулли.*

*Условная вероятность. Правило умножения вероятностей. Формула полной вероятности.*

*Дискретные случайные величины и распределения. Независимые случайные величины. Распределение суммы и произведения независимых случайных величин.*

Решение задач практического содержания, связанных с логикой.

**Резерв. 11 часов.**

## **11 класс. Геометрия.**

**Компенсирующая базовая программа. 35 часов.**

**Геометрические фигуры. 15 часов.**

Конус, цилиндр, шар и сфера.

**Измерения и вычисления. 8 часов.**

Соотношения в кубе.

Задачи на вычисление расстояний в пространстве с помощью теоремы Пифагора.  
*Теорема Пифагора в пространстве.*

*Понятие об объемах тел.* Использование для решения задач на нахождение геометрических величин формул объема призмы, цилиндра, пирамиды, конуса, шара.

*Понятие о подобии на плоскости и в пространстве.* Отношение площадей и объемов подобных фигур.

**Геометрические построения. 8 часов.**

*Изображение некоторых многогранников на плоскости.*

*Развертка прямоугольного параллелепипеда.*

*Проекция фигур на плоскость. Изображение цилиндра, конуса и сферы на плоскости.*

**Резерв. 4 часа.**

## **11 класс. Геометрия.**

**Базовая программа. 35 часов.**

**Геометрические фигуры. 15 часов.**

Тела вращения: цилиндр, конус, сфера и шар. Основные свойства прямого кругового цилиндра, прямого кругового конуса. Изображение тел вращения на плоскости.

*Представление об усеченном конусе, сечения конуса (параллельное основанию и проходящее через вершину), сечения цилиндра (параллельно и перпендикулярно оси), сечения шара. Развертка цилиндра и конуса.*

**Измерения и вычисления. 8 часов.**

*Простейшие комбинации многогранников и тел вращения между собой.* Вычисление элементов пространственных фигур (ребра, диагонали, углы).

Площадь поверхности прямого кругового цилиндра, прямого кругового конуса и шара.

Понятие об объеме. Объем пирамиды и конуса, призмы и цилиндра. Объем шара.

*Подобные тела в пространстве.* Соотношения между площадями поверхностей и объемами подобных тел.

**Векторы и координаты в пространстве. 8 часов.**

Векторы и координаты в пространстве. Сумма векторов, умножение вектора на число, угол между векторами. Коллинеарные и компланарные векторы. *Скалярное произведение векторов. Теорема о разложении вектора по трем некопланарным векторам. Скалярное произведение векторов в координатах. Применение векторов при решении задач на нахождение расстояний, длин, площадей и объемов.*

*Уравнение плоскости в пространстве. Уравнение сферы в пространстве. Формула для вычисления расстояния между точками в пространстве.*

**Резерв. 4 часа.**

Для обучающихся с низким образовательным уровнем целесообразно проводить курсы-практикумы по ликвидации пробелов. Пример тематического планирования элективного курса-практикума дан ниже.

**Примерное тематическое планирование курса-практикума по подготовке к выполнению заданий ЕГЭ по математике**

**10 класс**

2 ч в неделю, всего 68 ч

№ уроков	Содержание учебного материала
1–3	Решение прямоугольного треугольника по стороне и острому углу
4–5	Градусная и радианная меры углов. (Перевод градусной меры в радианную и обратно. Вычисление значений тригонометрических выражений, содержащих углы в радианной мере)
6–8	Преобразование алгебраических выражений с помощью формул сокращенного умножения и разложения многочлена на множители
9–12	Преобразования тригонометрических выражений с помощью тригонометрических формул
13–15	Подобие треугольников
16–18	Свойства углов при пересечении двух параллельных прямых третьей. Признаки параллельности прямых
19–20	Использование свойств тригонометрических функций для оценки значений тригонометрических выражений
21–22	Чтение графиков и диаграмм, содержащих статистические данные
23–26	Построение графиков линейной, квадратичной функций и обратной пропорциональности. Построение графиков функций с использованием параллельных переносов, сжатий и растяжений вдоль координатных осей
27–28	Применение графиков функций для описания их свойств
29	Применение свойства периодичности для вычисления значений выражения и построения графиков функций, заданных на некотором промежутке
30–32	Расстояние от точки до прямой, расстояние между параллельными прямыми. Вычисление высот треугольника, параллелограмма, трапеции
33–35	Решение текстовых задач на составление уравнений (квадратных, дробных рациональных)
36–39	Решение тригонометрических уравнений и неравенств
40–43	Вычисление производных элементарных и сложных функций (их значений в данной точке)
44–45	Решение линейных неравенств, неравенств второй степени и систем неравенств
46–48	Решение неравенств методом интервалов (целых (выше второй степени), дробных рациональных неравенств)
49–51	Составление уравнения касательной, проведенной к графику функции в точке с данной абсциссой. Вычисление абсциссы $x_0$ по данным о касательной. Поиск значения производной по графику функции и изображенной касательной
52–53	Решение физических задач на нахождение скорости или ускорения

	движения
54–55	Использование соотношений между координатами симметричных точек на плоскости
56–58	Задачи на векторы на плоскости
59–65	Исследование функций с помощью производной. Построение их графиков
66–68	Решение задач с экономическим содержанием (в том числе и на проценты). Решение задач на смеси и сплавы

### 3. Методика организации учебной деятельности

Важно обратить внимание на то, что наименее эффективным способом подготовки является прорешивание типовых вариантов ЕГЭ. Следует вести систематическое освоение и повторение школьного курса в соответствии с рабочей программой, составленной на основе приведенной выше. Решение полных типовых вариантов следует проводить не чаще одного раза в месяц. Часть времени следует посвятить выполнению индивидуально подобранных тренингов по темам, которые вызывают затруднение у конкретных обучающихся.

Для обучающихся со слабой математической подготовкой при отборе изучаемого материала нужно особое внимание уделить работе с текстом и формированию вычислительных умений. При изучении текущего учебного материала надо использовать наборы заданий из открытых банков, пособий для подготовки к экзамену, попадающих в список заданий, обеспечивающих прохождение аттестационного рубежа. Это задания базового уровня: на чтение графиков (задание 11); сопоставление величин (задание 9); бытовые расчеты (задание 6); работа с формулой (задание 4); на чтение графика функции и графика производной функции (задание 14); вычислительные примеры (задания 1, 2); простейшая задача на доли, проценты (задание 3); вычислительная текстовая задача (задание 12); квадратные, рациональные, иррациональные, тригонометрические, показательные, логарифмические уравнения (задание 7); ложные и истинные утверждения (задания 18); простейшая геометрическая задача (задание 8); на вычисление вероятности события (задание 10). По итогам выполнения заданий единого государственного экзамена профильного уровня – это задания: вычислительная текстовая задача (задание 1); на чтение графиков и диаграмм (задание 2); наглядная геометрия (задание 3); на вычисление вероятности события (задание 4); на решение квадратного, рационального, иррационального, показательного, логарифмического уравнений (задание 5); геометрическая задача (задание 6); чтение графика функции и графика производной функции, исследование функции с помощью производной (задание 7); стереометрическая задача (задание 8); применение математических методов для решения содержательных задач из различных областей науки (задание 10).

При решении каждого задания важно пройти все этапы:

- а) внимательно прочитать условие, выделить в тексте ключевые моменты;
- б) выполнить вычисления (рассуждения), обычно нужно сделать один-два шага;
- в) зафиксировать полученный ответ;
- г) проверить правильность ответа, решив обратную задачу, или подставив корни в уравнение, или оценив полученный ответ прикидкой ожидаемого результата, а при решении задачи проверить реалистичность полученного ответа;
- д) прочитать еще раз вопрос в задании и убедиться, что ответ получен именно на него.

После прохождения всех этапов решения задания у обучающегося должно сформироваться внутреннее убеждение: «Я сделал задание верно!»

После получения удовлетворительных результатов решения заданий по отдельным линиям (темам) можно формировать варианты, состоящие из нескольких заданий по разным линиям. Время выполнения варианта должно ограничиваться 10–15 минутами.

При решении заданий нужно пользоваться справочными материалами, которые выдаются в комплекте с вариантом контрольных измерительных материалов на экзамене (они опубликованы в составе демонстрационного варианта КИМ ЕГЭ: <https://fipi.ru/ege/demoversii-specifikacii-kodifikatory#!tab/151883967-2>).

Рассмотрим примеры составления подборок заданий по темам, на которые необходимо обратить особое внимание при подготовке к экзамену базового уровня.

Особое внимание нужно уделить вычислительным примерам.

### Задание 1.

1. Найдите значение выражения  $4,1 \cdot 7,7 + 0,86$ .
2. Найдите значение выражения  $(6,8 - 2,3) \cdot 22$ .
3. Найдите значение выражения  $2,7 + 1,32 : 1,2$ .
4. Найдите значение выражения  $\frac{2,4}{5,4 - 7,8}$ .
5. Найдите значение выражения  $2,4 : \left(1\frac{5}{14} - \frac{9}{10}\right)$ .
6. Найдите значение выражения  $4\frac{1}{7} + 12 + 3\frac{5}{14}$ .
7. Найдите значение выражения  $1\frac{5}{6} - 0,5 \cdot \left(-\frac{10}{3}\right)$ .
8. Найдите значение выражения  $\frac{14}{15} : \frac{7}{3} - 0,5$ .
9. Найдите значение выражения  $\left(\frac{5}{7} - \frac{3}{7}\right) : \frac{2}{21}$ .
10. Найдите значение выражения  $\left(\frac{1}{13} - 2\frac{3}{4}\right) \cdot 26$ .

*Рекомендации.* Нужно формировать наборы задач на все действия: сложение, вычитание, умножения, деление – с десятичными и обыкновенными дробями.

### Задание 2.

1. Найдите значение выражения  $4 \cdot 2^4 + 3 \cdot 2^3$ .
2. Найдите значение выражения  $57 \cdot 10 - 2,2 \cdot 10^2$ .
3. Найдите значение выражения  $\frac{4^3}{4^2 \cdot 4^{-1}}$ .
4. Найдите значение выражения  $\frac{3^{-10} \cdot 3^5}{3^{-7}}$ .
5. Найдите значение выражения  $\frac{(9^{-3})^2}{9^{-8}}$ .
6. Найдите значение выражения  $2^6 \cdot \frac{2^{-2}}{2^2}$ .
7. Найдите значение выражения  $\frac{8^3}{2^4} : 2^2$ .
8. Найдите значение выражения  $\frac{0,8 \cdot 10^{-1}}{4 \cdot 10^2}$ .
9. Найдите значение выражения  $9,5 \cdot 10^2 + 6,7 \cdot 10^3$ .

10. Найдите значение выражения  $6 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^2$ .

*Рекомендации.* Нужно формировать наборы задач на все действия со степенями с одним или двумя основаниями.

### Задание 3.

1. На пост председателя школьного совета претендовали два кандидата. В голосовании приняли участие 99 человек. Голоса между кандидатами распределились в отношении 2:7. Сколько голосов получил победитель?
2. Для приготовления фарша взяли говядину и свинину в отношении 1:3 соответственно. Какой процент в фарше составляет свинина?
3. Цена на электрический чайник была повышена на 15% и составила 3450 рублей. Сколько рублей стоил чайник до повышения цены?
4. Футболка стоила 800 рублей. После снижения цены она стала стоить 680 рублей. На сколько процентов была снижена цена футболки?
5. Ежемесячная плата за телефон составляет 250 рублей в месяц. В следующем году она увеличится на 4%. Сколько рублей будет составлять ежемесячная плата за телефон в следующем году?

*Рекомендации.* Нужно формировать наборы задач на части и все типы задач на проценты.

### Задание 4.

1. Среднее квадратичное трех чисел:  $a$ ,  $b$  и  $c$  – вычисляется по формуле

$$q = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}}. \text{ Найдите среднее квадратичное чисел } 8, 9 \text{ и } 7\sqrt{2}.$$

2. Работа постоянного тока (в джоулях) вычисляется по формуле  $A = \frac{U^2 t}{R}$ , где  $U$  — напряжение (в вольтах),  $R$  — сопротивление (в омах),  $t$  — время (в секундах). Пользуясь этой формулой, найдите  $A$  (в джоулях), если  $t = 8$  с,  $U = 6$  В и  $R = 2$  Ом.

3. Площадь треугольника со сторонами  $a$ ,  $b$ ,  $c$  можно найти по формуле Герона:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ где } p = \frac{a+b+c}{2}. \text{ Найдите площадь треугольника, если длины его сторон равны } 4, 13, 15.$$

4. Площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда с ребрами  $a$ ,  $b$  и  $c$  вычисляется по формуле  $S = 2(ab + ac + bc)$ . Найдите площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда с ребрами 3, 4 и 6.

5. Площадь треугольника вычисляется по формуле  $S = \frac{1}{2}bc \sin \alpha$ , где  $b$  и  $c$  — две стороны треугольника, а  $\alpha$  — угол между ними. Пользуясь этой формулой, найдите площадь  $S$ , если  $b = 18$ ,  $c = 16$  и  $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ .

*Рекомендации.* При формировании набора задач нужно использовать формулы текущего материала.

### Задание 6.

1. Летом килограмм клубники стоит 80 рублей. Маша купила 1 кг 500 г клубники. Сколько рублей сдачи она должна была получить с 500 рублей?
2. Павел Иванович купил американский автомобиль, спидометр которого показывает скорость в милях в час. Какова скорость автомобиля в километрах в час, если спидометр

показывает 59 миль в час? Считайте, что одна миля равна 1609 м. Ответ округлите до целого числа.

3. На бензоколонке один литр бензина стоит 40 руб. Водитель залил в бак 30 литров бензина и взял бутылку воды за 68 рублей. Сколько рублей сдачи он получит с 1500 рублей?

4. На счете Машиного мобильного телефона было 53 рубля, а после разговора с Леной осталось 8 рублей. Известно, что разговор длился целое число минут, а одна минута разговора стоит 2 рубля 50 копеек. Сколько минут длился разговор с Леной?

5. В школе есть шестиместные туристические палатки. Какое наименьшее количество палаток нужно взять в поход, в котором участвует 15 человек?

*Рекомендации.* При формировании набора задач одно-двухшаговые задачи на стоимость, округление до целого с недостатком, округление до целого с избытком.

### Задание 7.

1. Найдите корень уравнения  $2 + 9x = 4x + 3$ .

2. Решите уравнение  $x^2 - 7x - 18 = 0$ . Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите больший из них.

3. Найдите корень уравнения  $\sqrt{14 - 5x} = 3$ .

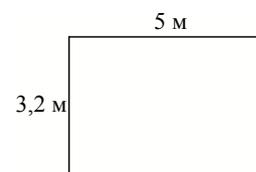
4. Найдите корень уравнения  $5^{x-6} = 25$ .

5. Найдите корень уравнения  $\log_3(2x - 5) = 2$ .

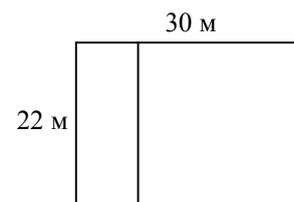
*Рекомендации.* При формировании набора линейных, квадратных, иррациональных, показательных, логарифмических уравнений желательно не усложнять уравнения.

### Задание 8.

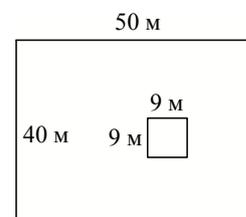
1. На плане указано, что прямоугольная комната имеет площадь 16,3 кв. м. Точные измерения показали, что ширина комнаты равна 3,2 м, а длина — 5 м. На сколько квадратных метров площадь комнаты отличается от площади, указанной на плане?



2. Дачный участок имеет форму прямоугольника со сторонами 22 метра и 30 метров. Хозяин планирует обнести его забором и разделить таким же забором на две части, одна из которых имеет форму квадрата. Найдите суммарную длину забора в метрах.



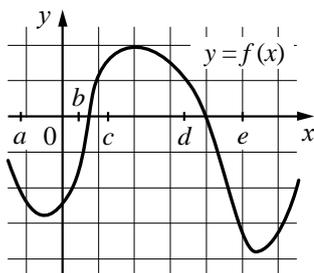
3. Дачный участок имеет форму прямоугольника, стороны которого равны 40 м и 50 м. Дом, расположенный на участке, имеет на плане форму квадрата со стороной 9 м. Найдите площадь оставшейся части участка, не занятой домом. Ответ дайте в квадратных метрах.



*Рекомендации.* Рисунок в геометрической задаче нужно воспринимать как изображение взаимного расположения элементов, но нельзя относиться к нему как к чертежу, где соблюдены все размеры. При подготовке к экзамену можно нарисовать свой рисунок, отметив все известные элементы, и уже с использованием этого рисунка решать задачу – находить площадь, сумму длин, и только потом отвечать на вопрос задания.

### Задание 14.

1. На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$ . Числа  $a, b, c, d$  и  $e$  задают на оси  $Ox$  интервалы. Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждому интервалу характеристику функции.



#### ИНТЕРВАЛЫ

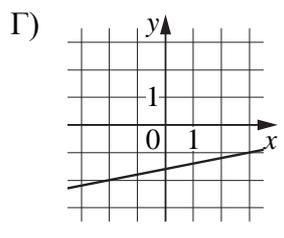
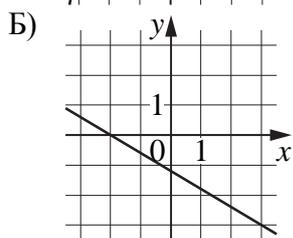
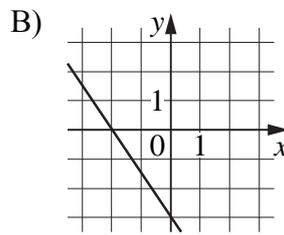
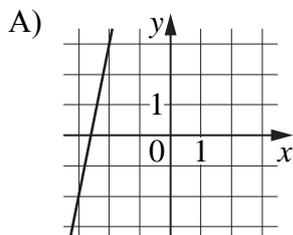
- А)  $(a; b)$
- Б)  $(b; c)$
- В)  $(c; d)$
- Г)  $(d; e)$

#### ХАРАКТЕРИСТИКИ

- 1) Значение функции отрицательно в каждой точке интервала.
- 2) Значение функции положительно в каждой точке интервала.
- 3) Функция возрастает на интервале.
- 4) Функция убывает на интервале.

2. На рисунках изображены графики функций вида  $y = kx + b$ . Установите соответствие между графиками функций и угловыми коэффициентами прямых.

#### ГРАФИКИ

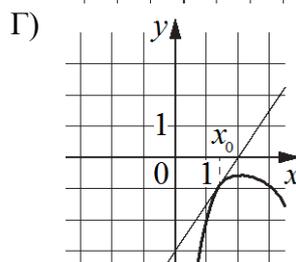
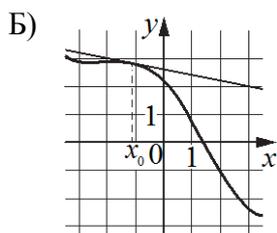
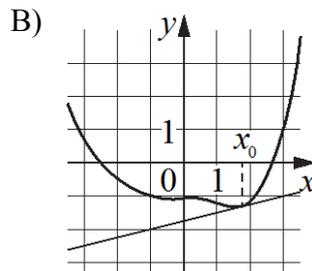
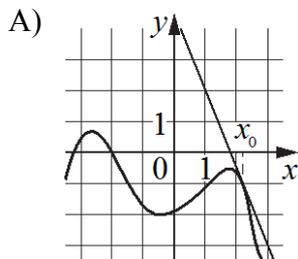


#### УГЛОВЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ

- 1) 0,2
- 2) 5
- 3) -1,5
- 4) -0,6

3. На рисунках изображены графики функций и касательные, проведенные к ним в точках с абсциссой  $x_0$ . Установите соответствие между графиками функций и значениями производной этих функций в точке  $x_0$ .

**ГРАФИКИ**



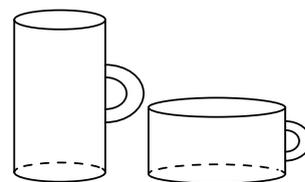
**ЗНАЧЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ**

- 1)  $-0,2$
- 2)  $-2,5$
- 3)  $1,5$
- 4)  $0,25$

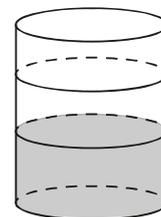
*Рекомендация.* Разбить решение задачи на нахождение углового коэффициента касательной (значения производной функции в точке) на два этапа: первый этап – определение знака; второй этап – определение модуля значения производной.

**Задание 13**

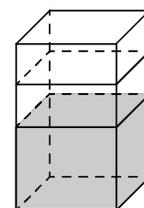
1. Даны две кружки цилиндрической формы. Первая кружка в полтора раза выше второй, а вторая втрое шире первой. Во сколько раз объем первой кружки меньше объема второй?



2. В бак цилиндрической формы, площадь основания которого равна 90 квадратным сантиметрам, налита жидкость. Чтобы измерить объем детали сложной формы, ее полностью погружают в эту жидкость. Найдите объем детали, если после ее погружения уровень жидкости в баке поднялся на 10 см. Ответ дайте в кубических сантиметрах.



3. В бак, имеющий форму правильной четырехугольной призмы, налито 10 л воды. После полного погружения в воду детали уровень воды в баке увеличился в 1,6 раза. Найдите объем детали. Ответ дайте в кубических сантиметрах, зная, что в одном литре 1000 кубических сантиметров.



*Рекомендации.* Следует обратить внимание на то, что в трехмерном пространстве объемы визуально сравнить труднее, чем площади на плоскости. Задачи нужно решать с использованием формул (справочные материалы).

Для формирования наборов заданий для подготовки к экзамену профильного уровня можно использовать открытый банк заданий, а также задания текущего изучения алгебры и начал математического анализа и геометрии.

## Литература:

При подготовке к экзамену рекомендуется изучить следующие материалы, опубликованные на официальном сайте ФГБНУ «ФИПИ»: <[www.fipi.ru](http://www.fipi.ru)>.

Демонстрационный вариант контрольных измерительных материалов единого государственного экзамена 2021 года по математике. Базовый уровень.

Демонстрационный вариант контрольных измерительных материалов единого государственного экзамена 2021 года по математике. Профильный уровень.

Спецификация контрольных измерительных материалов для проведения в 2021 году единого государственного экзамена по математике. Базовый уровень.

Спецификация контрольных измерительных материалов для проведения в 2021 году единого государственного экзамена по математике. Профильный уровень.

Кодификатор требований к уровню подготовки выпускников образовательных организаций для проведения единого государственного экзамена по математике.

Кодификатор элементов содержания по математике для составления контрольных измерительных материалов для проведения единого государственного экзамена.

Методические рекомендации для учителей, подготовленные на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ 2019 года (и предшествующие) по математике (можно воспользоваться аналогичными материалами более ранних лет).

Методические рекомендации обучающимся по организации индивидуальной подготовки к ЕГЭ 2020 года по математике. Базовый уровень.

Методические рекомендации обучающимся по организации индивидуальной подготовки к ЕГЭ 2020 года по математике. Профильный уровень.

Видеоконсультации по подготовке к ЕГЭ от руководителей и членов комиссий по разработке КИМ ЕГЭ, экспертов региональных предметных комиссий, преподавателей школ.

При подготовке к экзамену для формирования наборов заданий нужно использовать задачи из открытых банков заданий ЕГЭ по математике базового и профильного уровней, размещенных на официальном сайте ФГБНУ «ФИПИ».

Полезно использовать дистанционные сервисы и учебные пособия.

- На портале Московской электронной школы в разделе «Мои достижения» есть библиотека вариантов для самопроверки, уроки повторения материала.
- На портале Российской электронной школы в разделе «Мои достижения» есть библиотека вариантов для самопроверки.
- Тематические подборки и тренировочные варианты, видеоуроки Центра педагогического мастерства города Москвы.
- Пособия с типовыми вариантами для подготовки к ЕГЭ базового уровня (прошедшие научно-методическую оценку в ФГБНУ «ФИПИ»).